TRANSITORIUM I RIJKSUNIVERSITEIT UTRECHT

RELATIVISTISCHE BEGINSELEN

Dr. G. J. HOOYMAN

augustus 1972


REPRODUKTIE
FYSISCH LABORATORIUM

INLEIDING

In de fysica komt men tot relativistische problemen door te vragen naar de rol van de waarnemer. Sommige aspecten van deze vraagstelling komen naar voren in de quantum-mechanica (analyse van het meetproces, onzekerheidsrelaties), hier gaat het om de bewegingstoestand van de waarnemer. Worden de meetresultaten en de wetten die,een waarnemer daarmee vindt of verifieert, erdoor beïnvloed en zo ja, hoe?

Het woord waarnemer sluit hier ook in de verlengstukken van zijn armen, ogen en oren, d.w.z. een complete laboratoriumuitrusting, alle apparatuur die zich ten opzichte van hem in rust bevindt. Een of ander fysisch verschijnsel wordt nu geobserveerd door verschillende, onderling bewegende waarnemers die van identieke meetsystemen voorzien zijn (dat dergelijke identieke systemen bestaan garandeert de quantum-mechanica). Zullen ze voor allerlei grootheden dezelfde of verschillende waarden vinden? Voldoen die grootheden aan dezelfde wetten?

De twee waarnemers S en S' kunnen ook afspreken, beide eenzelfde experiment binnen hun laboratorium uit te voeren, d.w.z. identieke opstellingen in dezelfde begintoestand te brengen en de afloop der gebeurtenissen kwalitatief en kwantitatief te beschrijven. Opnieuw komt dan de vraag of het verloop der verschijnselen voor beide waarnemers door dezelfde wetten beschreven wordt. Ze zouden bijv. kunnen nagaan of de botsingswetten voor biljartballen dezelfde zijn of de eigenschappen van licht of de induktiewet van Faraday, kortom: vinden onze waarnemers dezelfde fysica?

Dat is zeker niet het geval als de onderlinge snelheid van de twee systemen niet constant is: alledaagse ervaringen in draaimolens, remmende auto's etc. leren ons dat in dergelijke systemen de dynamica niet beschreven wordt door de wet van Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ (zie ook het diktaat Klassieke Mechanica, p.29 over inertiestelsels en schijnkrachten). We zullen ons beperken tot systemen die t.o.v. elkaar eenparig rechtlijnig bewegen.

We beginnen met zeer eenvoudige voorbeelden, vooralsnog niet-relativistisch benaderd.

1) De Galilei-transformatie (Klassieke Mechanica, p.20) geeft een verband tussen de grootheden plaats, snelheid en versnelling voor S en S'

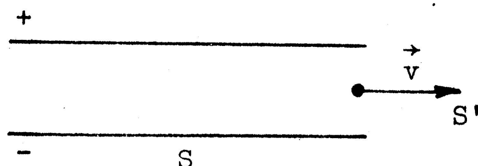
$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \qquad \vec{u}' = \vec{u} - \vec{v} \qquad \vec{a}' = \vec{a} \qquad (1)$$

indien S' de snelheid $\vec{v}$ heeft t.o.v. S en de oorsprongen O en O' van hun coördinatenstelsels op t = 0 samenvallen. Merk op, dat hierbij stilzwijgend ondersteld is dat de klokken van S en S', gelijkgezet bij het passeren van O en O', altijd gelijk lopen: t' = t.

2) Het Doppler-effekt: de frequentie van een periodieke golfbeweging zal voor S en S' in het algemeen een verschillende waarde hebben. Als S een lichtbron met frequentie ν inschakelt zal S' het licht waarnemen met een frequentie ν' die kleiner is dan ν als S' en S zich van elkaar verwijderen, groter als zij elkaar naderen. De frequentie-verschuiving $\Delta\nu$ is volgens de klassieke theorie in eerste benadering $(v/c)\nu$ waarin c de voortplantingssnelheid is van licht in vacuum.

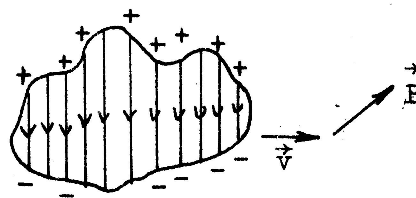
Het verschijnsel is voor geluidsgolven een zeer bekend ervaringsfeit: de teken-omkeer van de frequentie-verschuiving bij het passeren van bron en waarnemer kent u van snelheidscircuits of spoorwegovergangen.

3) Relativiteit van elektrisch en magnetisch veld: een voor S stilstaande ladingsverdeling bepaalt voor S een elektrisch veld $\vec{E}$. Voor S' zijn er (convectie-) stromen en dus ook een magnetisch veld $\vec{B}'$; bijv. tussen de platen van een geladen, in S stilstaande condensator zal S' zowel een veld $\vec{E}'$ als een veld $\vec{B}'$ kunnen meten. Hier blijkt $\vec{B}' \perp \vec{E}$ en de (niet-relativistische) berekening levert $B' = vE/c^2$ terwijl $\vec{E}' = \vec{E}$.



Ook het andere geval is instructief: een stationair magnetisch veld $\vec{B}$ in S zal door S' beschreven worden door stationaire velden $\vec{B}'$ en $\vec{E}'$.

Onderstel dat er in het systeem S een constant en uniform veld $\vec{B}$ is, in de figuur loodrecht op het papier naar achteren gericht. Neem aan dat $\vec{v} \perp \vec{B}$ is en dat S' een neutraal stukgeleider, bijv. koper, met zich meevoert.



S beschrijft zijn waarnemingen aan het stuk koper als volgt. Door de Lorentz-

kracht op de vrije elektronen zal er ladingsscheiding in het metaal optreden, de oppervlakte-lading geeft een elektrisch veld $\vec{E}$ (we hebben daarvan het deel binnen het koper getekend).

S' zal deze ladingsscheiding ook constateren. Maar voor hem is de geleider in rust en dus kan hij de aanwezige oppervlakte-lading alleen maar interpreteren als het gevolg van influentie, d.w.z. S' moet tot de conclusie komen dat de geleider geplaatst is in een reeds aanwezig uitwendig elektrisch veld $\vec{E}'$. Voor hem moet het inwendige van de geleider veldvrij zijn: het veld $\vec{E}'$en het veld van de oppervlakte-lading moeten daar samen nul zijn.

Daarmee heeft de geleider zijn dienst gedaan: hij diende alleen om het veld $\vec{E}'$ vast te stellen, ook zonder die geleider moet er voor S' een veld $\vec{E}'$ zijn.

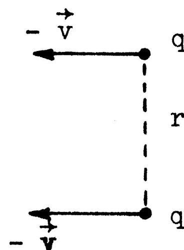
(Niet-relativistische berekening: in de evenwichtstoestand is voor S de kracht op de vrije elektronen nul dus in het metaal $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \vec{o}$. Daar is dus het veld van de lading homogeen en gelijk aan $\vec{E} = - \vec{v} \times \vec{B}$. In het metaal is het eigen veld van de lading voor S' dan ook $- \vec{v} \times \vec{B}$ en omdat dit veld daar samen met $\vec{E}'$ nul moet zijn is $\vec{E}' = + \vec{v} \times \vec{B}$, loodrecht op $\vec{B}$ en $\vec{v}$).

Uit deze voorbeelden leren we dat de beschrijving van een elektromagnetisch veld voor de onderscheiden waarnemers verschillend is. Bovendien kunt U hier al vermoeden, dat het gebruikelijke onderscheid tussen elektrische en magnetische velden zeer betrekkelijk is: het zal U niet verbazen dat t.z.t. $\vec{E}$ en $\vec{B}$ beschreven zullen worden als componenten van een algemener elektromagnetisch veld (een zgn. tensor-veld.) Ook zult U begrijpen dat de elementaire wetten zoals die van Coulomb, Ampère en Faraday niet los van elkaar staan maar slechts bijzondere gevallen van de later te bepreken wetten van Maxwell.

4) Krachten voor S en S': uit het voorgaande valt af te leiden dat ook krachten voor verschillende waarnemers in het algemeen niet gelijk zullen zijn. Kijk eens naar de twee condensatorplaten hierboven. Voor S zullen die op elkaar een aantrekkende Coulombkracht uitoefenen. Ook S' zal dat beweren, die Coulombkracht is voor hem (in eerste bena-

dering) ook dezelfde als voor S. Maar de bewegende platen zijn voor hem tevens evenwijdige, tegengesteld gerichte stromen en dat betekent afstoting. De nettokracht is voor S' dan ook kleiner dan voor S (de aantrekking blijkt het te winnen).

Hoewel het niet moeilijk is, bij eenvoudige situaties (zoals de condensatorplaten of twee evenwijdige ladingsrechten) de krachten uit te rekenen, zullen we dat hier niet doen maar de zaak eens toespitsen op twee gelijke puntladingen, bijv. twee elektronen, die rusten in S maar voor S' op vaste afstand van elkaar met snelheid $-\vec{v}$ bewegen. Gemakshalve kiezen we hun verbindingslijn loodrecht op $\vec{v}$. Hier is de kracht $\vec{F}$ voor S alleen de Coulomb-afstoting, voor S' moet die kracht verminderd worden met een aantrekkend deel (de aantrekking van gelijkgerichte stromen). Weer vinden we voor de interactiekracht, dat $F' < F$.



Een quasi-klassieke berekening levert $F' \simeq (1 - v^2/c^2)\, F$ en dat geeft tevens een indruk van de verhouding tussen de "magnetische kracht" en de Coulombkracht, nl. v^2/c^2 dus als regel $\ll 1$.

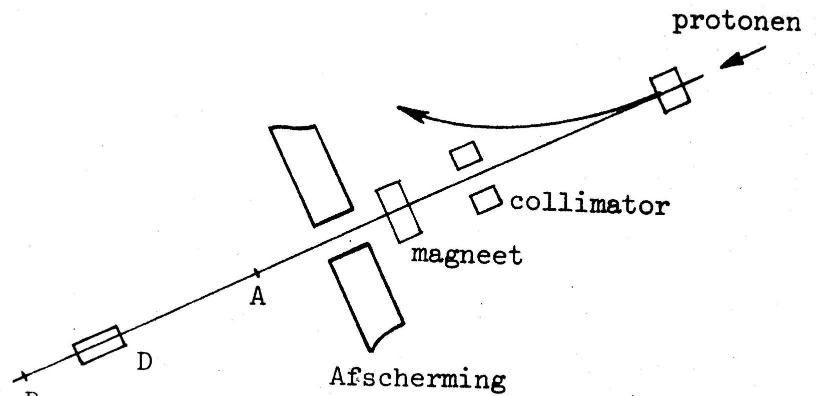
We moeten nu tot de conclusie komen dat er iets mis moet zijn met onze naïeve manier van transformeren tussen S en S': het gevonden resultaat voor de interactiekracht tussen twee elektronen laat zich niet verzoenen met de Galilei-transformatie en de wet van Newton in de gebruikelijke vorm $\vec{F} = m\vec{a}$. Volgens die transformatie is immers $\vec{a}' = \vec{a}$ (invariant) terwijl $\vec{F}' \neq \vec{F}$. Er kan nu van alles mis zijn: de massa m kan voor S en S' verschillend zijn (dat is inderdaad het geval, zie blz. 22 e.v., maar het lost het probleem hier nog niet op omdat de massa voor S' juist groter is dan voor S), de wet van Newton zou, <u>in deze vorm</u> althans, wel eens niet in alle stelsels kunnen gelden (ook dat is het geval, we zullen nog zien dat de vorm $\vec{F} = d(m\,\vec{v})/dt$ wel in de meeste stelsels geldig is; historisch interessant is dat Newton zelf niet de snelheidsverandering $\Delta\,\vec{v}$ of de versnelling $d\vec{v}/dt$ in de wet opnam maar juist de impulsverandering $\Delta(m\vec{v})$; overigens is het onderhavige probleem ook met deze verbeterde wet van Newton

nog niet opgelost) terwijl het tenslotte ook nog mogelijk is dat we een fout maakten toen we in onze redeneringen stilzwijgend de lading van het elektron als een invariante grootheid behandelden (dat de fout hier ligt is onwaarschijnlijk: een snelheidsafhankelijke lading zou zich experimenteel manifesteren in de baan van een snel elektron in een elektrisch veld en is ook niet gemakkelijk te rijmen bijv. met de experimenteel zeer precies geverificeerde elektrische neutraliteit van moleculen H_2 en atomen He).

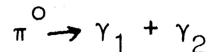
In elk geval dient de Galilei-transformatie nader onderzocht te worden. Zijn er experimentele aanwijzingen voor of tegen? Het beste leent zich voor een dergelijke toets de snelheidstransformatie en men heeft dit al in de vorige eeuw geprobeerd voor een snelheid die zich zeer nauwkeurig laat meten, nl. de lichtsnelheid of ook de snelheid van fotonen in vacuum. Dat komt er op neer dat men met geschikte apparatuur rechtstreeks de snelheid meet van licht uit een bron die t.o.v. die apparatuur beweegt en wel met een goed bekende snelheid. Het lijkt een aantrekkelijk idee, hiervoor zon- of sterlicht te gebruiken, maar dat stuit op diverse bezwaren. Het grootste bezwaar is wel dat de meting irrelevant zou zijn: het licht heeft de aardatmosfeer gepasseerd en we hebben dus te doen met secundaire straling waarvan de snelheid geen verband meer hoeft te hebben met die van de oorspronkelijke bron (zelfs de ijle interstellaire materie bederft de zaak al).

Gelukkig zijn er moderne experimenten met bronnen die zelf ongeveer de lichtsnelheid hebben t.o.v. onze apparatuur: men heeft de snelheid kunnen bepalen van γ-quanta, ontstaan bij de desintegratie van instabiele elementaire deeltjes die zelf een snelheid iets kleiner dan c hebben. Als zo'n γ-quantum wordt uitgezonden in dezelfde richting als waarin het deeltje bewoog zouden we volgens de Galilei-transformatie een snelheid van bijna 2 c verwachten (als bij een rijdend kanon dat zijn kogels in voorwaartse richting afvuurt).

In 1964 heeft een groep medewerkers (Alväger e.a.) van CERN in Genève zo'n experiment uitgevoerd. Protonen met een energie van ongeveer 2.10^{10} eV werden op stilstaande kernen geschoten.



Hierbij ontstonden o.a. neutrale π-mesonen die zelf een energie van meer dan 6.10^9eV hebben, hetgeen neerkomt op een snelheid van 0,99975 c. Zij kunnen desintegreren in twee γ- quanta met een zo korte halveringstijd, dat ze zelfs bij deze enorme snelheid slechts enkele microns reizen en dus praktisch ter plaatse van hun ontstaan desintegreren:



$$\pi^o \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2$$

De figuur toont schematisch de opstelling waarmee de fotonsnelheid met een "vlucht-tijd-methode" werd bepaald. De protonen en dus ook de fotonen kwamen in zeer korte pulsen aan en men kon het tijdsverschil meten tussen een invallende protonen-puls en de er na volgende puls van fotonen in detector D. Dit tijdsverschil werd bepaald met D in diverse posities tussen A en B (afstand 30 m) en daaruit volgde de snelheid der fotonen op het traject AB: $(2,9977 \pm 0,0004) . 10^8$ m/s dus binnen 0,1 o/oo gelijk aan de lichtsnelheid bij stilstaande bron.

Dergelijke experimenten zijn geheel in tegenspraak met de Galilei-transformatie, die uit eenvoudige ervaringen aan makroskopische objecten was afgeleid onder omstandigheden waarbij relatieve snelheden daarvan klein t.o.v. de lichtsnelheid c waren.

De Galilei-transformatie moet dus door een andere transformatie vervangen worden, die we uit nader te bepalen principes of postulaten moeten afleiden en waarvan de consequenties zoveel mogelijk door experimenten geverifieerd moeten worden.

Een dergelijk postulaat vinden we al in onvolkomen vorm bij Galilei, impliciet ook bij Huygens en tenslotte duidelijk geformuleerd bij Newton, het had betrekking op de mechanica. Newton nam het bestaan van een "absolute ruimte" aan en zijn mechanica-wetten zouden geldig zijn voor een waarnemer, in rust in de absolute ruimte. Bovendien

stelde hij uitdrukkelijk de tijd als een absolute grootheid zodat een "duur" voor iedere waarnemer gelijk zou zijn (t' = t bij de Galilei-transformatie). Uit deze onderstellingen, de invariantie van de massa en de expliciete vorm van de bewegingsvergelijking leidt Newton dan het **relativiteitsprincipe** af (Corollary V in de *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis* van Newton) * waarin de beweging bedoeld is t.o.v. de absolute ruimte. Laten we dit begrip achterwege (de moderne fysica kent juist geen bevoorrecht referentiesysteem evenmin als een ether) dan kunnen we dit principe ook anders formuleren. Een systeem waarin de traagheidswet of 1e wet van Newton geldig is noemen we een inertiaal stelsel. Het is, strikt genomen, een idealisatie: de inertie-wet spreekt van vrije deeltjes, die kunnen we alleen maar in zeer goede benadering realiseren; het aardstelsel kan voor vele verschijnselen als inertiaal beschouwd worden, maar niet altijd; een zeer veel betere benadering van een inertiaal stelsel is het melkwegstelsel, maar ook dat roteert als geheel; voor kosmologische problemen moet men een beroep doen op de algemene relativiteitstheorie, maar voor alle problemen op kleinere schaal vormen de "vaste sterren" een voldoende benadering van het begrip inertiaal stelsel.

Het relativiteitsprincipe van Newton zou nu als volgt kunnen worden geformuleerd:

een referentiestelsel, dat t.o.v. een inertiaal stelsel eenparig rechtlijnig beweegt, is zelf een inertiaal stelsel.

Of ook: de wetten van de mechanica zijn dezelfde voor alle waarnemers die t.o.v. een inertiale waarnemer eenparig rechtlijnig bewegen.

Of ook: het is niet mogelijk de constante beweging van een afgesloten systeem ten opzichte van een inertiaal systeem vast te stellen door mechanische experimenten binnen dat systeem.

Stellen we dit principe als een postulaat en voeren we daarnaast de Galilei-transformatie als "vertaalcode" in dan zou volgen: de grondwetten van de mechanica zijn invariant voor Galilei-transformaties.

Nu hebben we hierboven al een experimenteel gegeven vermeld, waarmee de Galilei-transformatie in strijd is: de snelheid van het foton in

* The motion of bodies included in a given space are the same among themselves, whether that space is at rest, or moves uniformly forwards in a right line without any circular motion.

verschillende stelsels. Dat leidt vanzelf tot de vraag naar een andere transformatie. Historisch heeft men die vraag langs een heel andere weg bereikt, maar ook toen was het centrale probleem, de wetten van het elektromagnetisme (en de optica) en de transformatieregels met elkaar in overeenstemming te brengen. Lorentz heeft ook de juiste transformatie van plaats en tijd aangegeven, maar de interpretatie ervan en het theoretisch kader van de door hem gegeven oplossingen waren toch nog niet echt relativistisch: in de 2e helft van de vorige eeuw werkte nog sterk de onderstelling door dat alle verschijnselen, ook de elektromagnetische, herleid moesten kunnen worden tot mechanische processen, met name in het medium, ether genoemd. We zullen die historische weg, hoe interessant ook, niet volgen, maar direct de uitgangspunten kiezen, die Einstein in 1905 heeft aangegeven (en waartoe Poincaré al zeer dicht genaderd was). Einstein deed dit in een artikel, dat zich heel gemakkelijk laat lezen en waarvan de titel de herkomst van het probleem aangeeft: "Zur Elektrodynamik bewegter Körper". De speciale relativiteitstheorie komt daarbij te rusten op twee postulaten (waarvan het ene een uitbreiding is van het Newton-principe), waarbij in de uitwerking niet alleen de "absolute ruimte" en de "ether" geheel komen te vervallen maar ook het idee van een absolute tijd.

<u>Relativiteitspostulaat</u>: er bestaat een (drievoudig) oneindige verzameling referentiesystemen, die ten opzichte van elkaar eenparig rechtlijnig bewegen en waarin alle fysische verschijnselen op gelijke wijze verlopen.

Of: een referentiesysteem dat t.o.v. een inertiaal systeem een eenparige translatie ondergaat kan daarvan door geen enkel experiment binnen zo'n systeem onderscheiden worden (is dus zeker zelf inertiaal).

Of ook: alle fysische wetten zijn bij passende formulering invariant bij transformatie van een inertiaal systeem naar een ander systeem dat t.o.v. het eerste eenparig rechtlijnig beweegt (en dus zelf ook inertiaal is).

<u>Lichtpostulaat</u>: licht plant zich in vacuum voort met een vaste snelheid c die onafhankelijk is van de bewegingstoestand van de bron. D.w.z. de lichtsnelheid in vacuum is ten allen tijde, in alle richtingen en vòor alle inertiale (en zelfs niet-inertiale) waarnemers dezelfde.

Het eerste postulaat is duidelijk een uitbreiding van dat van Newton, niet alleen de mechanica maar elke fysische theorie dient er aan te voldoen. Het tweede postulaat wordt zeer direct ondersteund door de eerder genoemde experimenten maar was natuurlijk al eerder impliciet bevestigd door vele andere empirische verificaties van de relativiteitstheorie.

Er zijn verschillende manieren om vanuit deze postulaten te komen tot de Lorentz-transformaties. De meeste leerboeken geven een elementaire afleiding. Men kan ook wiskundig meer abstract te werk gaan en vragen naar alle lineaire transformaties die de golfvergelijking van elektromagnetische straling invariant laten (of ook eenvoudiger de vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$) en vindt dan de zgn. Poincaré-groep. Een deelverzameling daarvan (die men krijgt door af te zien van triviale verplaatsingen van de oorsprong en van het nulpunt op de tijdschaal) is de volledige Lorentz-groep waarin naast de hieronder af te leiden bijzondere Lorentz-transformaties ook nog voorkomen eindige draaiingen van de ruimte-assen, spiegelingen aan de oorsprong van die assen en de tijdomkeer (en al hun produkten).

We zullen hier een methode kiezen die op een eenvoudig gedachte-experiment berust en signaal-methode of radar-methode zou kunnen heten.

We beginnen met een eenvoudige opmerking: als een waarnemer op $t = 0$ een elektromagnetisch signaal of een foton uitzendt, dat ergens gereflecteerd wordt en bij hem terugkeert, kan hij uit de reisduur van het foton direct tijd en plaats van reflectie bepalen. Het lichtpostulaat garandeert daarbij dat de bewegingstoestand van de reflector daarbij niet ter zake doet!

Dit leidt tot een op papier zeer simpele manier om bijv. de snelheid v van een passerende auto te bepalen mits $v < c$: zet de klok op $t = 0$ bij het passeren, stuur hem een tijd T later een signaal achterna en lees de klok af bij terugkomst van dat signaal. Wijst de klok daarbij αT dan is:

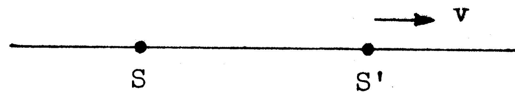
tijdstip reflectie $\frac{1}{2}(\alpha + 1)T$

plaats " $\frac{1}{2}(\alpha - 1)Tc$

en daaruit volgt direct

$$v = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} c \qquad (2)$$

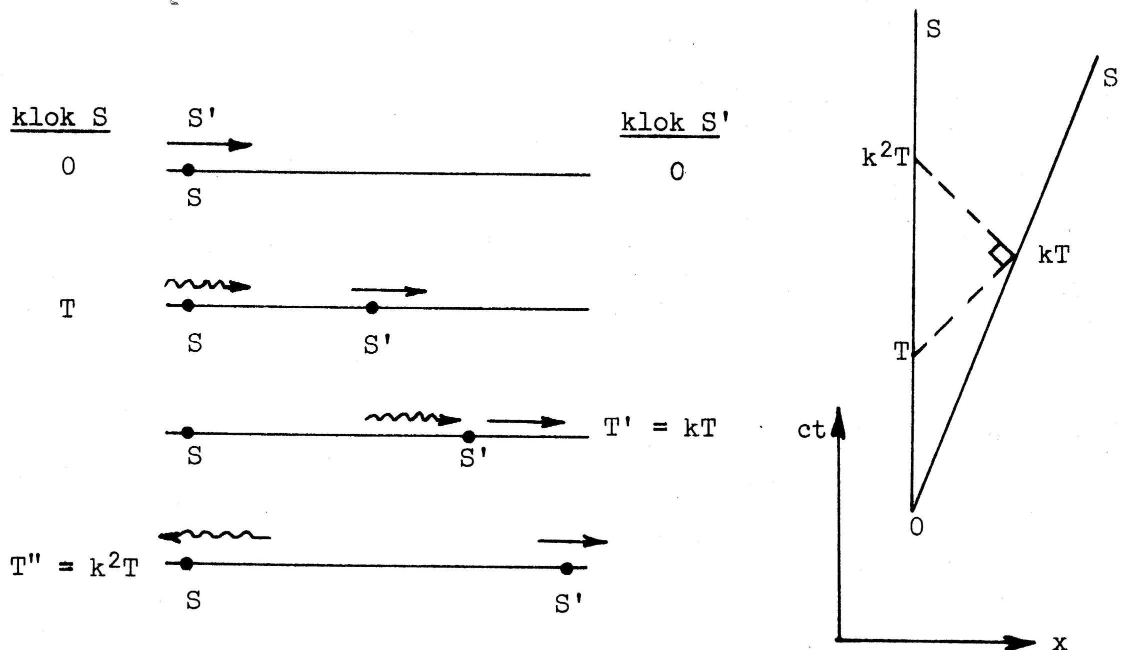
Beschouw vervolgens twee waarnemers S en S' die t.o.v. elkaar een snelheid $v < c$ hebben en bij het passeren hun klokken gelijk zetten op $t = t' = 0$.



S stuurt periodiek radar- of lichtsignalen of fotonen naar S', het tijdsinterval tussen 2 opeenvolgende signalen is T op de klok van S. Een van deze emissies valt op $t = 0$. De signalen worden door S' ontvangen. We beweren - het bewijs volgt - dat deze ontvangsten door S' ook als een periodiek verschijnsel worden geregistreerd, waarvan de konstante periode T' (op de klok van S') evenredig is met T:

$$T' = kT \tag{3}$$

Als dit zo is kan k alleen afhangen van de relatieve snelheid v. Het verband tussen k en v vinden we nu precies zo als relatie (2) hierboven: het eerste signaal dat S na het passeren van S' uitzendt (tijdstip T op de klok van S) kan door S' worden gereflecteerd en door S' worden terugontvangen.



Bij reflectie staat de klok van S' op kT. Beschouw nu het gereflecteerde signaal als een door S' ten tijde kT uitgezonden signaal. Volgens het relativiteitsprincipe kunnen de rollen van S en S' verwisseld worden en dus zal S het signaal van S' waarnemen als zijn klok aanwijst $T'' = kT'$ en wegens (3) is dus $T'' = k^2T$.

Kortom: als S ten tijde T na passeren S' een signaal achterna stuurt zal de klok van S bij terugontvangst k^2T aanwijzen. De grootheid α uit (2) is hier dus k^2 en we vinden

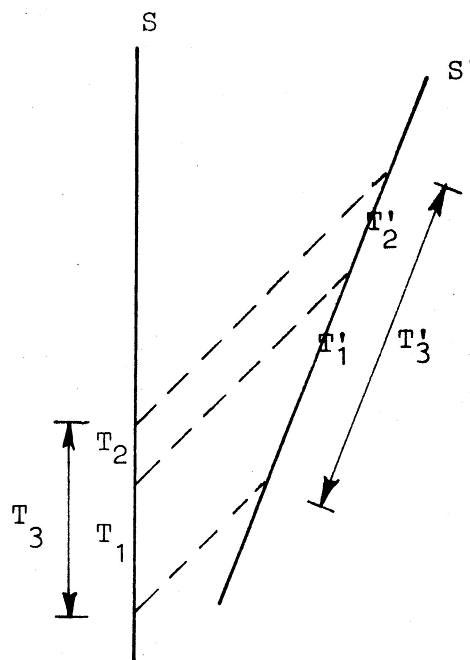
$$v = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}\, c \qquad \text{of} \qquad k = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \tag{4}$$

waarin $\beta = v/c$. Als S' zich van S verwijdert is $k > 1$.

Ter illustratie een tijd-ruimte-diagram, waarin de rechthoekige coördinaten de plaats x en de tijd t, omgerekend tot een lengte ct, zijn voor S. De reis van een foton wordt weergegeven door een rechte onder 45° of 135° met de positieve ct-as ($x = x_o \pm ct$)

Afleiding van (3): het is in overeenstemming met het relativiteitspostulaat dat een voor S periodiek verschijnsel ook door S' periodiek wordt waargenomen. Als er bijv. een monochromatische vlakke lichtgolf evenwijdig aan de lijn SS' loopt zullen beide dit als licht ervaren en tussen het passeren van opvolgende maxima constante tijdsintervallen waarnemen, T voor S en T' voor S'.

Om het verband $T' = f(T)$ te bepalen nemen we aan dat S drie signalen uitzendt, de twee eerste gescheiden door een willekeurige duur T_1, de twee laatste door een willekeurige duur T_2 en dus (wegens additiviteit van opvolgende tijdsintervallen) de 1e en 3e door $T_3 = T_1 + T_2$, alles op de klok van S.



Evenzo geldt voor de 3 ontvangsten door S' op diens klok $T'_3 = T'_1 + T'_2$. Dat betekent $f(T_3) = f(T_1) + f(T_2)$ en dus moet f een functie zijn die voor willekeurige waarden T_1 en T_2 voldoet aan

$$f(T_1 + T_2) = f(T_1) + f(T_2)$$

Zoals U zelf kunt nagaan is de enige continue functie die hieraan voldoet het verband (3).

Uit het resultaat (4) kunnen we direct enkele gevolgen afleiden:

a) Longitudinaal Doppler-effect: (4) beschrijft eigenlijk het longitudinale Doppler-effect voor licht in vacuum. Licht in de richting SS' dat voor S een frequentie $\nu = 1/T$ en dus een golflengte $\lambda = cT$ heeft zal door S' gezien worden als licht met frequentie ν' en golflengte λ' waarbij

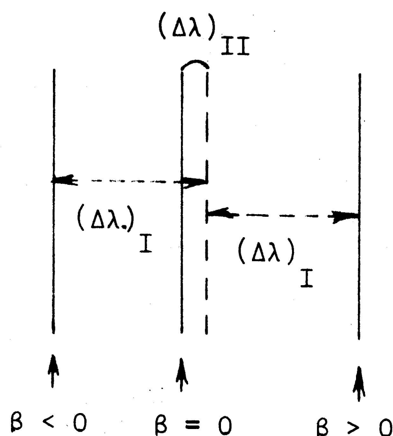
$$\lambda' = k\,\lambda = \lambda \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \qquad \nu' = \nu/k = \nu \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \qquad (5)$$

Dezelfde relaties gelden als de bron in het stelsel S in rust is en wel met $\beta > 0$ als S en S' zich van elkaar verwijderen en met $\beta < 0$ als zij elkaar naderen. Omdat $\beta < 1$ kunnen we de uitdrukkingen in machtreeksen naar β ontwikkelen en de Doppler-verschuivingen bepalen:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \beta\,\lambda + \tfrac{1}{2}\,\beta^2\,\lambda + \ldots..$$

$$\Delta\nu = \nu' - \nu = -\,\beta\,\nu + \tfrac{1}{2}\,\beta^2\,\nu + \ldots..$$

In de eerste orde is het resultaat gelijk aan de niet-relativistische uitdrukking. Het verschil tussen de relativistische en de niet-relativistische resultaten, dat bij kleine waarde van β praktisch geheel bepaald wordt door de kwadratische term, is in de jaren 1938-41 experimenteel aangetoond in de proeven van Ives en Stillwell, waarbij in een elektrisch veld ionen H_2^+ (en H_3^+) versneld werden die vervolgens na neutralisatie en dissociatie H-atomen in aangeslagen toestand gaven. Uit het door deze atomen ge-emitteerde spectrum werden de golflengten van bepaalde lijnen zeer nauwkeurig gemeten. Dit gebeurde zowel voor licht in de bewegingsrichting van de H-atomen ($\beta < 0$) als in de achterwaartserichting ($\beta > 0$). De eerste-orde-term $(\Delta\lambda)_I = \beta\lambda$ is in die twee gevallen tegengesteld, de tweede-orde-term $(\Delta\lambda)_{II}$ is voor beide gelijk.



In de experimenten was $\beta \simeq 5.10^{-3}$ zodat termen van hogere orde verwaarloosd konden worden. $(\Delta\lambda)_I$ en $(\Delta\lambda)_{II}$ konden afzonderlijk bepaald worden: $(\Delta\lambda)_I$ is immers de helft van het golflengteverschil van de twee verschoven lijnen, $(\Delta\lambda)_{II}$ is het verschil tussen de gemiddelde golflengte van de verschoven lijnen en de golflengte, uitgezonden door stilstaande atomen. Het verband

$$(\Delta\lambda)_{II} = (\Delta\lambda)_I^2 \,/\, 2\lambda$$

werd in een serie metingen bij verschillende waarden van β bevestigd.

Opgave. Licht met golflengte λ valt uit een in het laboratorium stilstaande bron loodrecht op een spiegel, die met snelheid $\pm \vec{v}$ naar de bron toe (of er van af) beweegt. Ga na dat in het laboratorium de golflengte van het gereflecteerde licht $k^2\lambda$ is en bepaal de Dopplerverschuiving in 1e en 2e orde.

b) Tijdsdilatatie. S zal beweren dat de klok van S' achterloopt maar S' zal hetzelfde beweren over de klok van S.

Beschouw nl. de reflectie van het eerste signaal na het passeren van S en S' (zie fig. bij (4)). De klok van S' wijst dan k T. Voor S gebeurde die reflectie precies midden tussen de emissie (tijd T) en terugontvangst (k^2T) van het signaal, dus ten tijde $t = \frac{1}{2}\,(k^2 + 1)T > k\,T$. Daarmee is S met behulp van het heen- en weer-reizende signaal in staat, om de klok van S' "af te lezen" en hij concludeert dat de klok van S' bij de zijne achterloopt.

Omgekeerd zou S' ook de klok van S via signalen kunnen aflezen en moeten vaststellen dat juist de klok van S achterloopt.

De verhouding van de gang van de klokken is

$$\frac{k^2 + 1}{2k} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \geq 1$$

Preciezer gezegd:

- is τ de duur tussen twee voorvallen van een fysisch systeem, gemeten in zijn ruststelsel (de "eigen duur"), dan is de duur t voor een bewe-

gende waarnemer

$$\boxed{t = \gamma \tau} \qquad (6)$$

en ook:

- zijn twee (punt-) voorvallen in één inertiaal systeem gelijkplaatsig en in dat systeem gescheiden door een duur τ dan is de duur t in een ander inertiaal systeem gegeven door (6).

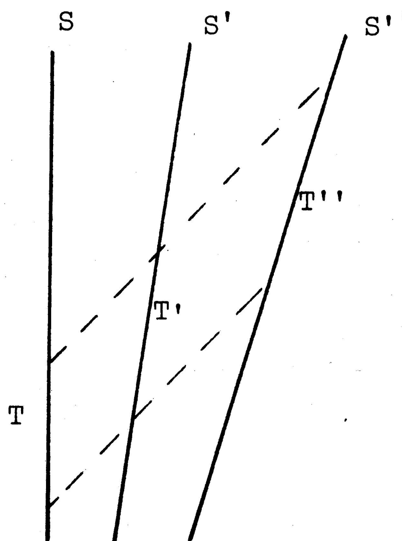
N.B. De relatie (4) beschrijft niet deze tijdsdilatatie, want in (4) is er geen sprake van het vergelijken van de duur tussen twee gegeven voorvallen, maar van de tijd T tussen 2 emissies voor S en de tijd T' tussen 2 ontvangsten voor S'.

Een rechtstreekse experimentele bevestiging van de tijdsdilatatie is de verlengde gemiddelde levensduur van snel bewegende instabiele deeltjes of radio-actieve kernen. Zo gaven metingen aan μ-mesonen in de kosmische straling die met een snelheid van circa 0,994 c in de atmosfeer vallen en in hun rustsysteem een gemiddelde levensduur van $2{,}2.10^{-6}$ sec hebben, een levensduur die ongeveer 9 maal zo groot was, in overeenstemming met (6).

c) Een-dimensionale snelheidstransformatie (optellen van evenwijdige snelheden).

Laat een deeltje of een waarnemer S'' een snelheid u' hebben t.o.v. S' in de richting van de positieve x'-as. Hoe groot is dan de snelheid u van S" t.o.v. S?

Passen we de signaalmethode toe tussen S en S' en spreken we af dat S' de signalen direct doorstuurt naar S'' dan zijn dit tevens signalen tussen S en S'' (er is altijd een waarnemer te vinden tussen S en S'' die stilstaat t.o.v. S') en we vinden: als



$T'' = k(u')T'$ en $T' = k(v)T$ dan is bij $T'' = k(u)T$ voldaan aan

$k(u) = k(u')\, k(v)$

Met het verband (4) tussen snelheid en k-factor volgt daaruit

$$\boxed{u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}} \qquad (7)$$

Als u' en $v \ll c$ zijn vinden we de Galilei-transformatie terug. Uit $u' < c$ en $v < c$ volgt $u < c$ zodat een deeltje "langzamer dan licht" voor de ene waarnemer dat ook is voor alle andere inertiale waarnemers die in dezelfde richting bewegen.

(7) is in overeenstemming met het lichtpostulaat: is $u' = c$ (een foton) dan is ook $u = c$.

De inverse transformatie van (7) volgt door op te lossen naar u' maar sneller door u en u' te verwisselen en v te vervangen door $-v$.

Er is een heel oud experiment, dat bij benadering goed beschreven wordt door (7), nl. de meting van de lichtsnelheid in een bewegend medium, door Fizeau al in 1851 verricht voor snel stromend water. Is n de brekingsindex van het medium dan is de lichtsnelheid in een systeem, waarin dat medium rust, gelijk aan c/n. In een systeem waarin het medium met snelheid v beweegt vinden we uit (7) voor de lichtsnelheid u met $u' = c/n$ wegens $v \ll c$:

$$u = \frac{c/n + v}{1 + v/nc} = \left(\frac{c}{n} + v\right)\left(1 - \frac{v}{nc} + \ldots\right) \simeq \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)v$$

De metingen van Fizeau waren in overeenstemming met dit resultaat (dat toen overigens op grond van ether-modellen was afgeleid, de factor $1 - 1/n^2$ werd geïnterpreteerd als de "meeslepingscoëfficiënt" van de ether). Om de experimenteerkunst van Fizeau naar waarde te schatten moet U bedenken dat het om een heel klein effect gaat want de 2e term is ontstellend klein t.o.v. de 1e (de watersnelheid was in de buurt van 7 m/sec). Een beschrijving van de gebruikte interferometrische methode kunt U in allerlei boeken vinden.

Overigens moeten we opmerken, dat de afleiding niet helemaal correct is. Men moet ook nog rekening houden met dispersie (brekings-

index n en dus ook u' afhankelijk van de frequentie van het licht) en met het Doppler-effect (in $u' = c/n$ is n de brekingsindex in het ruststelsel van het water, d.w.z. horend bij de frequentie ν' die ongelijk is aan ν). Deze verfijning is al door Lorentz aangebracht en leidt in 1e orde van de snelheid v tot de relatie

$$u = \frac{c}{n} + \{1 - \frac{1}{n^2} + \frac{\nu}{n}\frac{dn}{d\nu}\}\, v \tag{8}$$

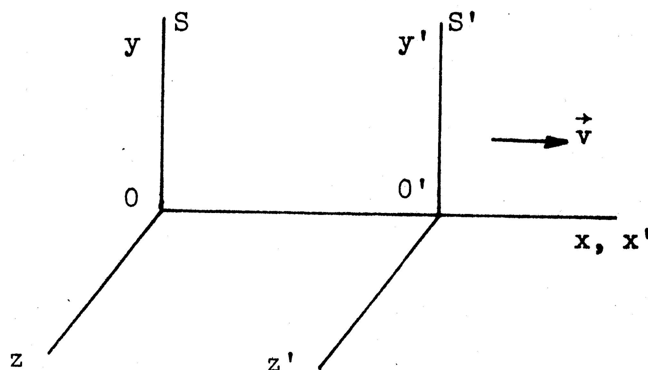
Uiterst verfijnde metingen van Zeeman in 1914 aan licht in water en later ook in bewegende kwarts- en glasstaven hebben ook de correctieterm bevestigd.

d) Lorentz-transformatie

Tenslotte kunnen we de signaal-methode gebruiken voor het afleiden van de Lorentz-transformatie.

Twee gegeven puntvoorvallen zijn voor S gescheiden door een afstandsvektor $\vec{r}$ en een duur t, voor S' door een $\vec{r}\,'$ en een t'. De Lorentz-transformatie geeft het verband hiertussen.

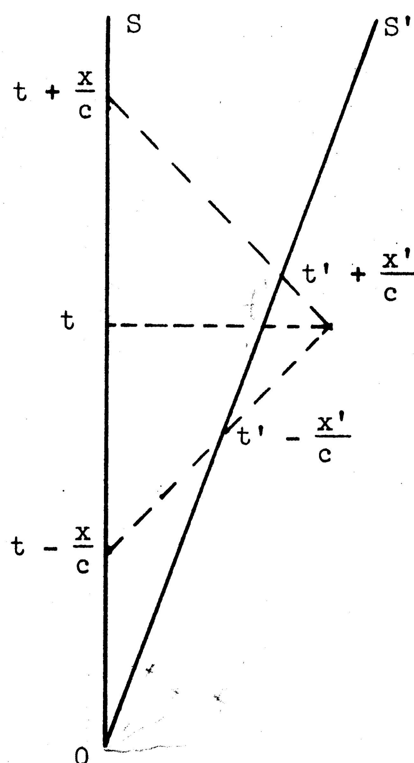
We volstaan met de bijzondere Lorentz-transformatie, waarbij x-as en x'-as langs elkaar vallen, hun positieve richting die is van de snelheid $\vec{v}$ van S' t.o.v. S, de vlakken y = 0 en z = 0 samenvallen resp. met y' = 0 en z' = 0 en 0 en 0' op een tijdstip t = t' = 0 samenvallen.



Als eerste voorval kiezen we het samenvallen van 0 en 0', als tweede de reflectie van een signaal op de x, x' -as: S stuurt op een positief tijd-

stip vanuit 0 een signaal, dat 0' passeert ($v < c$) en ergens op de x, x'-as gereflecteerd wordt. Tijd en plaats van dit tweede voorval zijn t en x voor S, t' en x' voor S'.
Op de klok van S valt de emissie op $t - x/c$ en de terugkomst op $t + x/c$.
De klok van S' wijst $t' - x'/c$ resp. $t' + x'/c$ als het signaal hem passeert. (zie blz. 17a)

Uit de definitie van de k-factor volgt dan:



$$t' - \frac{x'}{c} = k(t - \frac{x}{c}) \quad \text{en} \quad t + \frac{x}{c} = k(t' + \frac{x'}{c}) \tag{9}$$

en dit levert bij oplossen

$x' = \gamma\,(x - vt)$ $t' = \gamma\,(t - \frac{v}{c^2}x)$	Bijzondere Lorentz-transformatie (10)

waarin weer $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2} = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$

De inverse transformatie volgt door oplossen naar x en t maar sneller door verwisseling van x met x', t met t' en vervanging van v door -v.

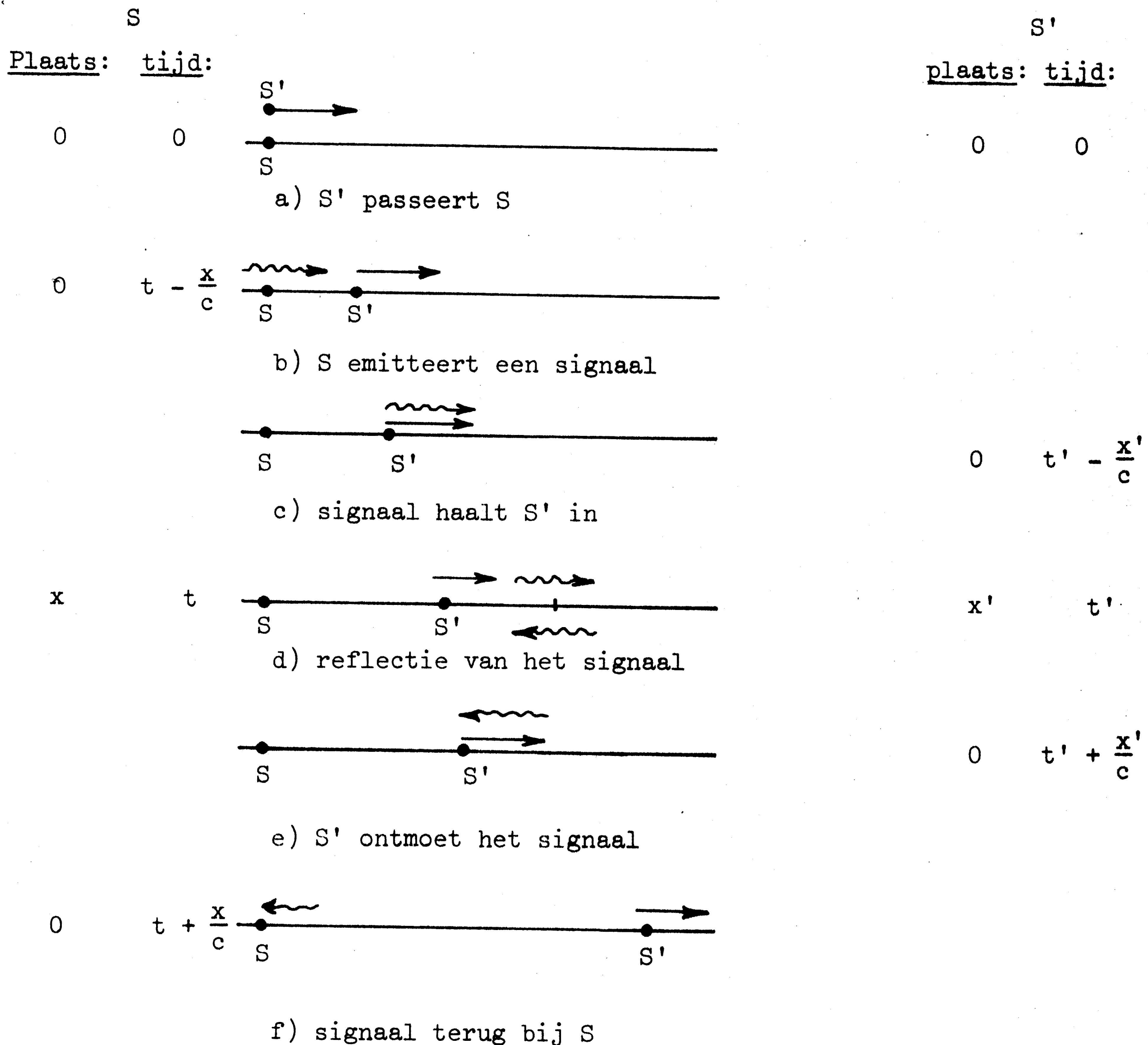
(10) wordt gecompleteerd door

$$y' = y \quad \text{en} \quad z' = z \tag{11}$$

Dit volgt bijv. uit de vergelijking van een lichtgolffront dat op $t = t' = 0$ uit $0 = 0'$ vertrekt. Voor S is die vergelijking

TOELICHTING BIJ BLZ. 17

Schema van voorvallen bij de afleiding van de Lorentz-transformatie:



a) en d) zijn de twee puntvoorvallen, gescheiden door x en t voor S en door x' en t' voor S'.

$r^2 - c^2t^2 = 0$ en voor S' evenzo $r'^2 - c^2t'^2 = 0$. De laatste moet door een Lorentz-transformatie uit de eerste volgen. De kwadratische vorm $r'^2 - c^2t'^2$ kan dus hoogstens een constante faktor α van $r^2 - c^2t^2$ verschillen.
Dat $\alpha = 1$ moet zijn volgt door speciaal naar voorvallen op de x, x'-as te kijken: uit (9) blijkt dat $x'^2 - c^2t'^2 = x^2 - c^2t^2$. Dus is $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ een <u>invariant van de Lorentz-transformatie.</u>

Bij elk puntvoorval buiten de x, x'-as hoort een gelijktijdig voorval op de x, x'-as: de projectie met dezelfde x en x'. Voor beide is $x'^2 - c^2t'^2 = x^2 - c^2t^2$ zodat $y'^2 + z'^2 = y^2 + z^2$. Maar dan moet ook aan (11) voldaan zijn want er is axiale symmetrie om de $\vec{v}$-richting, zodat de Lorentz-transformatie niet verandert als we de assenstelsels van S en S' samen draaien om de $\vec{v}$-richting.

<u>Enkele gevolgen van de Lorentz-transformatie</u>.

a) Tijdsdilatatie. (6) kan natuurlijk opnieuw worden afgeleid. Beschouw twee voorvallen die in één van de stelsels in hetzelfde vlak $\perp \vec{v}$ liggen maar niet simultaan zijn, bijv. het tweemaal aflezen van een in S' stilstaande klok. Dan is $x' = 0$ en is $t' = \tau$ de duur in S', dan volgt (6) direct uit (de inverse van) (10).

2 voorvallen, gelijkplaatsig in S, duur $\tau \to$ S' duur $\gamma\tau$

b) Lorentz-contractie. Beschouw twee voorvallen, die in één van de stelsels, bijv. S, gelijktijdig zijn en in verschillende vlakken $\perp \vec{v}$ liggen. Dan is $t = 0$ en geeft (10) $x' = \gamma x$.

Pas dit toe op een fysisch systeem, dat in S' rust en waaraan S de afstand wil meten tussen twee punten P en Q. Dan moet S de posities van P en Q op één moment vastleggen, $t = 0$. Is $\lambda = x'$ de projectie van PQ voor S' langs de x'-as (de "eigen lengte" in de snelheidsrichting) en $l = x$ het meetresultaat van S dan zien we

$$\boxed{l = \frac{\lambda}{\gamma} = \lambda\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad (12)$$

Het bewegende systeem verschijnt voor S dus verkort in de bewegingsrichting. In een dwarsrichting vinden S en S' dezelfde maten, het volume verschijnt voor S verkleind, faktor $1/\gamma$.

2 [illegible] S [illegible]: $x = \lambda$ [illegible]
λ l
$l -$ [illegible]

Omgekeerd zal natuurlijk S' elk systeem dat in S rust verkort in de snelheidsrichting waarnemen. Ga dat na.

Probeer (12) eens zonder (10) af te leiden uit de signaal-methode en evt. met behulp van (6).

c) Geen absolute gelijktijdigheid. Voor de twee voorvallen uit de aanhef van b) geldt ook $t = 0$ maar $t' \neq 0$. Dus twee voorvallen, simultaan in S zijn niet gelijktijdig in S' als $x \neq 0$.

Dit is één van de meest markante verschillen met de Galilei-transformatie en de "absolute tijd" van Newton.

d) Volgorde van voorvallen. Ook de relaties "voor" en "na" en het onderscheid tussen toekomst en verleden zijn niet altijd absoluut want volgens (10) kan $t > 0$ heel goed samengaan met $t' < 0$.

Wat betekent dit indien voorval I de fysische oorzaak is van II? Kan het dan gebeuren dat de tijdsvolgorde van I en II verschillend is voor verschillende waarnemers? Dus dat voor sommige waarnemers het effect in de tijd voorafgaat aan de oorzaak?

We geven eerst een algemeen (van het referentiesysteem onafhankelijk) criterium voor willekeurige voorvallen I en II:

de relatie "I gebeurt vóór II" geldt, indien hij voor S waar is, dan en slechts dan voor alle waarnemers, verbonden door bijzondere Lorentz-transformaties, indien

$$r^2 - c^2t^2 \leqq 0 \qquad (13)$$

Het linkerlid is Lorentz-invariant zodat (13) zeker een absoluut criterium is. Nu het bewijs.

Laten I en II in S gescheiden zijn door afstand $\vec{r}$ en duur t met $t > 0$. Als (13) geldt is stellig $x^2 - c^2t^2 \leqq 0$ en dus $|x| \leqq ct$ zodat altijd

$$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \geqq \gamma(t - \frac{v}{c^2}ct) = \gamma t(1 - \frac{v}{c}) > 0$$

want $0 \leqq v < c$. Dus uit $t > 0$ volgt $t' > 0$ als (13) geldt.

Omgekeerd: zij gegeven dat bij $t > 0$ elke bijzondere Lorentz-transformatie (dus ook elke $v < c$) leidt tot $t' > 0$. Kies de oorsprong van S ter plaatse van I en zet in S de klok op 0 simultaan met I. Als toevallig II in S op dezelfde plaats gebeurt als I, is $r = 0$ en zeker aan (13) voldaan. Is dit niet zo, kies dan in S de positieve x-as door de plaats van II zodat $r^2 - c^2t^2 = x^2 - c^2t^2$. Dan is voor elke $v < c$ ook $t' > 0$ of $t - vx/c^2 > 0$ dus $ct > vx/c$ en dus $c^2t^2 \geqq x^2$ d.i. (13). Dus beschrijft (13) alle voorvallen die in absolute zin in de toekomst ($t > 0$) of in het verleden ($t < 0$) van I liggen.

Equivalent met $r^2 - c^2t^2 > 0$ is: voor sommige waarnemers is I vóór II, voor andere is I na II en er is er zeker een waarvoor I en II simultaan zijn. Probeer dat zelf te bewijzen, evenals het volgende: als $r^2 - c^2t^2 < 0$ is er altijd een inertiale waarnemer waarvoor I en II op dezelfde plaats geschieden (vanuit S gezien: die waarnemer kan met $v < c$ van I naar II reizen), als $r^2 - c^2t^2 = 0$ liggen I en II voor elke waarnemer in ruimte en tijd uiteen (geen inertiale waarnemer heeft lichtsnelheid)

Dit alles kan veel overzichtelijker worden afgeleid door afbeelding van voorvallen op punten van een 4-dimensionale ruimte met 3 ruimte-coördinaten en 1 tijd-coördinaat (zie college Lorentz-invariantie). Twee punten bepalen dan een vektor met "lengte"- kwadraat $r^2 - c^2t^2$ en we onderscheiden drie soorten vektoren:

$r^2 - c^2t^2 = 0$: nulvektoren of lichtvektoren (ze vormen de lichtkegel met I als top);

$r^2 - c^2t^2 < 0$: tijdachtige vektoren (naar toekomst of verleden, binnen de lichtkegel);

$r^2 - c^2t^2 > 0$: plaatsachtige vektoren (buiten de lichtkegel, het "elders").

Onze eerder gebruikte diagrammen zijn doorsneden van deze S_4 met het x, t-vlak. Zie ook Feynman I, hoofdstuk 17.

Hoe zit het nu met de tijdsvolgorde als I oorzaak is van II? Is dan aan (13) voldaan? Zeker wel als I en II in een of ander stelsel S gelijk-

plaatsig zijn ($r = 0$). Zijn ze dat niet in S dan moet de interactie zich als een of ander fysisch signaal van I naar II hebben voortgeplant (een foton of ander deeltje, een golfpakketje) met snelheid V. Dan is $r = Vt$ en (13) leert ons dat de tijdsvolgorde van oorzaak en effect voor alle inertiale waarnemers dezelfde is indien zulke signaalsnelheden V niet groter zijn dan de lichtsnelheid c (en omgekeerd). Echte signalen sneller dan c zijn tot nu toe niet in de natuur gevonden zodat het fysische "causaliteitsprincipe" vooralsnog geldig is.

e) Transformatie van snelheden. Transformatie (7) kunnen we ook uit (10) afleiden en met (11) uitbreiden tot snelheden, niet evenwijdig aan $\vec{v}$.

(10) en (11) gelden voor willekeurige intervallen, dus wegens lineariteit ook voor differenties $\Delta x'$ enz. en ook voor differentialen dx' enz. en dit leidt tot

$$u'_{x'} = \frac{dx'}{dt'} = \frac{u_x - v}{1-u_x v/c^2}$$

$$u'_{y'} = \frac{dy'}{dt'} = \frac{u_y}{\gamma(1-u_x v/c^2)} \quad \text{en} \quad u'_{z'} = \frac{dz'}{dt'} = \frac{u_z}{\gamma(1-u_x v/c^2)}$$

Hetzelfde volgt uit $dx'/dt' = (dx'/dt) / (dt'/dt)$ enz.

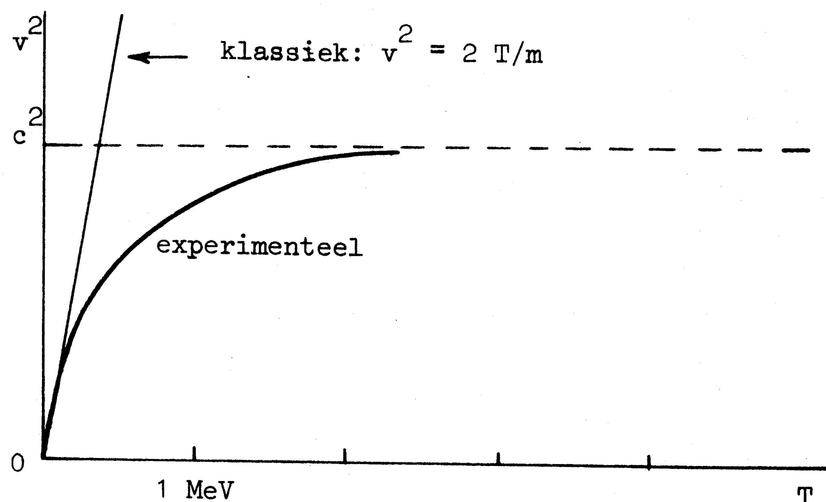
Relativistische dynamica.

Massa en impuls. Een opmerkelijk verschil tussen de klassieke en de relativistische dynamica is het feit dat de trage massa van een deeltje snelheidsafhankelijk is en dus verschillend voor verschillende waarnemers. Als m_o de massa in het ruststelsel is, dan is die afhankelijkheid

$$m = \gamma\, m_o = m_o / \sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{14}$$

Dit verband was al vóór het ontstaan van de relativiteitstheorie ingevoerd. Bovendien waren er experimentele indicaties: bij bepalingen van de specifieke lading van het elektron (lading/massa) was Kaufmann in 1901 al gebleken dat deze grootheid bij toenemende snelheid kleiner werd, latere metingen konden met (14) in overeenstemming worden gebracht.

Een modern experiment, dat in overeenstemming is met (14) en nader af te leiden relaties is de meting van het verband tussen de snelheid v van een elektron en de kinetische energie T. Daartoe werd een bundel elektronen in een elektrisch veld versneld, waarna v en T afzonderlijk gemeten werden. Klassiek zou de snelheid onbeperkt met T (dus met de versnelspanning) moeten toenemen, het experiment toonde aan dat bij toenemende energie de snelheid asymptotisch tot de lichtsnelheid nadert.



c verschijnt dus als een niet te bereiken limiet bij het versnellen, bij constante kracht neemt v tenslotte nauwelijks meer toe, het deeltje vertoont een toenemende traagheid.

De relatie (14) kunnen we ook afleiden uit enkele fundamentele wetten van de dynamica, naar analogie met de Newton-mechanica geformuleerd en als postulaten ingevoerd.

Beschouw een afgesloten systeem van deeltjes (puntmassa's), zonder interactie behoudens een wisselwerking op het moment van en ter plaatse van een botsing. Bij die botsing kunnen de kinematische grootheden veranderen, ook kunnen er uit de botsing andere deeltjes te voorschijn komen dan er oorspronkelijk waren. Ieder deeltje is gekarakteriseerd door een rustmassa m_{io} (ontleend aan de in zijn ruststelsel geldige Newton-mechanica) en heeft voor de inertiale waarnemer S een snelheid $\vec{v}_i$.

We willen, dat S (en dan ook elke andere inertiale waarnemer) aan elk deeltje een grootheid massa m_i toekent, die extensief zal zijn (dus i.h.b. evenredig aan m_{io}) en verder alleen een functie is van de grootte van $\vec{v}_i$ dus

$$m_i = m_{io} f(v_i)$$

De functie f moet voor alle waarnemers dezelfde zijn, gelijk aan 1 voor $v_i = 0$, voorts continu en monotoon stijgend. De grootheid massa zal ook additief zijn.

Ter bepaling van f postuleren we twee behoudswetten:

behoud van massa in ieder inertiaal stelsel:

$$dM/dt = d\,\Sigma_i m_i/dt = 0 \tag{15}$$

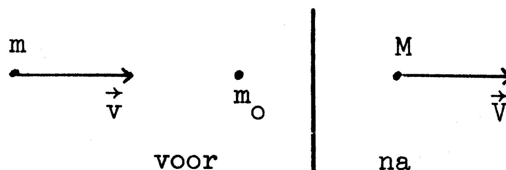
behoud van impuls in ieder inertiaal stelsel:

$$d\vec{P}/dt = d\,\Sigma_i \vec{p}_i/dt = 0 \tag{16}$$

waarbij de impuls $\vec{p}_i$ gedefinieerd is als $m_i\vec{v}_i$. (dat M en $\vec{P}$ inderdaad in elke situatie uniek voor alle waarnemers gedefinieerd zijn, zullen we hier niet afleiden: het is besloten in de onderstelling, dat de deeltjes alleen puntbotsingen uitvoeren en verder vrije deeltjes zijn).

Om hieruit (14) af te leiden beschouwen we een speciaal geval: de volkomen inelastische botsing van twee identieke deeltjes. In het

laboratoriumstelsel S valt een deeltje met snelheid $\vec{v}$ op een gelijksoortig stil staand deeltje met rust-massa m_o. Er ontstaat één nieuw deeltje met snelheid $\vec{V}$ en massa M. Stel $m = m_o f(v)$.



massabehoud in S: $m + m_o = M$

impulsbehoud in S: $mv = MV$

$$V = \frac{mv}{m + m_o} = \frac{f}{1 + f} v$$

Dezelfde botsing beschrijven we in S' d.i. het stelsel waarin het einddeeltje stilstaat. S' is inertiaal want $V < v < c$. In S' is de eind-impuls nul, dus ook de beginimpuls (S' is het zwaartepuntstelsel, of beter het nulimpulsstelsel want relativistisch is de goede definitie: het stelsel waarin de totale impuls nul is). In S' hebben de begindeeltjes dus tegen-gestelde impulsen dus is $m_1' v_1' = m_2' v_2'$ of $v_1' f(v_1') = v_2' f(v_2')$ en omdat f monotoon stijgend is moeten de 2 deeltjes in S' dus een even grote snel-heid hebben gehad: $v_1' = v_2' = v'$.

Anderzijds kunnen we v_1' en v_2' door snelheidstransformatie afleiden uit de snelheden in S. Dat geeft

$v_1' = V$ (het in S stilstaande deeltje)

$$v_2' = \frac{v - V}{1 - vV/c^2}$$

Stellen we deze twee gelijk en vervangen we V door de gevonden uit-drukking in f en v dan volgt

$$f(v) = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} = 1/\sqrt{1 - \beta^2} = \gamma$$

d.i. het in (14) gegeven resultaat.

Met deze nieuwe definitie van de massa en de erbij horende nieuwe vorm van de impuls $\vec{p} = m\vec{v}$ kunnen we ook andere botsingen dan juist deze inelastische botsing "relativistisch invariant" beschreven worden, m.a.w.

men kan inderdaad aan (15) en (16) in elk inertiaal stelsel voldoen. We zullen dat niet hier bewijzen, omdat de gehele beschrijving veel eleganter verloopt met behulp van vier-vektoren (in te voeren in het latere college Lorentz-invariantie). Niettemin kunt U eenvoudige botsingsprocessen al beschrijven met (14), (15) en (16) in een willekeurig inertiaal stelsel, evenals desintegratieprocessen.

Dynamica. De wet van impulsbehoud voor een geïsoleerd systeem of een vrij deeltje is de nieuwe vorm van de traagheidswet. We hebben daarnaast een bewegingsvergelijking nodig, een relativistisch correcte vorm van de tweede wet van Newton. De klassieke wet van Newton, waarin de massa een echte constante is, voldoet in zeer goede benadering bij snelheden $v \ll c$ en we gaan er van uit dat ze (ook in de vorm kracht = massa x versnelling), exact geldig is in het ruststelsel van een deeltje. Hierbij moet U bedenken dat een deeltje, ook wanneer het een in de tijd veranderende snelheid v heeft, toch een inertiaal ruststelsel heeft: omdat $v < c$ is er altijd een inertiaal stelsel waarin zo'n deeltje "op het gegeven moment" een snelheid nul heeft, maar een versnelling die niet nul behoeft te zijn in dat stelsel. Men noemt dat het instantane of momentane ruststelsel.

Kracht zullen we definiëren als impulsverandering per tijdseenheid $d\vec{p}/dt$. In het ruststelsel postuleren we dan de bewegingsvergelijking

$$\vec{F}_o = d\vec{p}_o/d\tau \qquad (17)$$

waarin τ de eigen tijd van het deeltje, $\vec{p}_o$ de impuls in het instantane ruststelsel is en $\vec{F}_o$ de kracht in dat stelsel, een gegeven functie van coördinaten, snelheden, etc. De bewegingsvergelijking in een ander inertiaal stelsel kan uit (17) worden afgeleid zodra we er zeker van zijn, dat beide leden van de vergelijking op dezelfde wijze transformeren bij een Lorentz-transformatie (het zou bijv. kunnen zijn dat het linkerlid nog van een faktor voorzien moet worden, die in het ruststelsel de waarde 1 heeft, bijv. de faktor γ). Er is één geval waarvoor dit inderdaad bewezen kan worden, nl. als $\vec{F}_o$ de kracht is op een geladen deeltje in een elektromagnetisch veld: de Lorentz-kracht $q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ blijkt precies zo te transformeren als de grootheid $d\vec{p}/dt$. We zullen dat hier niet bewijzen,

maar er volgt wel uit dat andere krachten dan ook als $d\vec{p}/dt$ transformeren, want als zo'n kracht evenwicht maakt met de Lorentz-kracht in zeker stelsel S dan ook in elk ander stelsel S'. Door transformatie van (17) volgt dus de bewegingsvergelijking in een willekeurig inertiaal stelsel

$$\boxed{\vec{F} = d\vec{p}/dt} \tag{18}$$

Hoewel de <u>vorm</u> hiervan dezelfde is als de klassieke wet van Newton is het grote verschil dat in $\vec{p} = m\vec{v}$ ook m van de tijd afhangt. Bij uitschrijven komt er

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \vec{v} = m\vec{a} + \frac{dm}{dt} \vec{v} = \gamma\, m_o \vec{a} + m_o \frac{d\gamma}{dt} \vec{v} \tag{19}$$

In tegenstelling tot de klassieke wet hoeven versnelling en kracht niet dezelfde richting te hebben. Als bijv. een proton met aanvangsnelheid $\vec{v}_o$ loodrecht op een homogeen elektrisch veld invalt (klassiek: een paraboolbaan) zal het proton zeker in de veldrichting versneld worden; door het toenemen van v zal ook de massa toenemen. In de richting van $\vec{v}_o$ is de kracht nul, dus blijft in die richting de impuls constant, maar omdat m toeneemt zal de snelheidscomponent in die richting, die eerst $\vec{v}_o$ was, moeten afnemen: in die richting dus geen kracht, maar wel een (negatieve) versnelling.

Uit (18) kunnen we voorts een uitdrukking afleiden voor de <u>kinetische energie</u> T. Evenals klassiek definiëren we het mechanische vermogen, door het krachtveld $\vec{F}$ geleverd aan het deeltje, als $\vec{F}.\vec{v}$ en stellen dit gelijk aan de toename van T per tijdseenheid:

$$\frac{dT}{dt} = \vec{F}.\vec{v} = \vec{v}.\frac{d\vec{p}}{dt} = m\, \vec{v}.\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}.\vec{v}\, \frac{dm}{dt} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\, m \frac{d}{dt} (\vec{v}.\vec{v}) + v^2 \frac{dm}{dt} = \tfrac{1}{2}\, m \frac{dv^2}{dt} + v^2 \frac{dm}{dt} \tag{20}$$

Ter besparing van rekenwerk herschrijven we het verband $m = \gamma\, m_o$ als volgt:

$$m^2c^2 = m_o^2\, c^2 + m^2v^2 \tag{21}$$

waaruit na differentiëren naar t en delen door 2m volgt:

$$\frac{dmc^2}{dt} = \tfrac{1}{2}\, m \frac{dv^2}{dt} + v^2 \frac{dm}{dt}$$

en dat is precies het laatste lid van (20) zodat

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dmc^2}{dt} \quad \text{of} \quad T = mc^2 + \text{konstante}$$

De integratie-konstante wordt bepaald door de eis dat $T = 0$ als $v = 0$. Dan is $m = m_o$ zodat we vinden

$$\boxed{T = mc^2 - m_oc^2 = (m - m_o)c^2 = (\gamma - 1)m_oc^2} \qquad (22)$$

Als we hierin γ uitdrukken in v^2 komt er het gezochte verband tussen T en v. De na (14) genoemde experimentele kromme blijkt precies door (22) beschreven te worden.

Einstein heeft aan de in (22) voorkomende termen de volgende interpretatie gegeven: m_oc^2 is de rustenergie E_o, d.i. de energie die een deeltje in zijn ruststelsel toekomt en evenals m_o een invariante grootheid is. In een ander stelsel is de totale energie E de som van E_o en T:

$$\boxed{E = E_o + T = mc^2} \qquad (23)$$

en deze relatie is door Einstein gegeneraliseerd door de equivalentie van massa en energie te postuleren: met elke massa m correspondeert een energie mc^2, elke energie E is een trage massa E/c^2. De behoudswet voor de energie valt dus samen met die voor de massa (bij botsingen hoeven we dus aan (15) en (16) niet nog een behoudswet voor energie toe te voegen).

De toepassingen van (23) zijn welbekend: chemische reacties, atomaire processen, kernreacties, reacties met elementaire deeltjes, etc. De relatie (23) zowel als de behoudswet zijn daarbij steeds door experimenten bevestigd. Vaak kan men (bijv. voor een kernreactor) de uitspraak aantreffen dat "massa in energie kan worden omgezet". Naast het equivalentie-postulaat is dit hoogst verwarrend of liever: nonsens.

Men bedoelt dan dat rustenergie of rustmassa kan worden omgezet in andere vormen van energie of massa, bijv. in kinetische energie of stralingsenergie.

Door m of γ in een machtreeks naar v te ontwikkelen volgt:

$$E = m_o c^2 + \tfrac{1}{2} m_o v^2 + \frac{3}{8} m_o \frac{v^4}{c^2} + \ldots\ldots \qquad (24)$$

De eerste term is de in de klassieke mechanika onbekende rustenergie E_o, de tweede term is de klassieke kinetische energie.

Als energie-eenheid gebruikt men hier meestal de elektron-volt (= $1{,}60.10^{-19}$ J). Gemakkelijk te onthouden zijn de afgeronde waarden voor de rustenergie van het proton: 1 GeV = 10^3 MeV en die van het elektron: 0,5 MeV (preciezer: 938 MeV en 0,511 MeV).

Uit (21) volgt een belangrijk verband tussen energie en impuls, want (21) kan direkt herschreven worden als

$$\boxed{E^2 - p^2c^2 = E_o^2} \qquad (25)$$

Het rechterlid is voor alle inertiale waarnemers gelijk, dus is ook het linkerlid een invariant , precies als $r^2 - c^2t^2$ in de kinematika. In overeenstemming daarmee is dat de grootheden $\vec{p}$ en E/c op precies dezelfde wijze transformeren als $\vec{r}$ en ct, d.w.z. dat de transformatieformules uit (10) kunnen worden verkregen door resp. $\vec{r}$ en ct te vervangen door $\vec{p}$ resp. E/c:

$$p'_x = \gamma(p_x - v\,E/c^2) \qquad p'_y = p_y$$
$$E' = \gamma(E - v\,p_x) \qquad p'_z = p_z \qquad (26)$$

Probeer dit zelf af te leiden.

Als de snelheid van een deeltje vergelijkbaar is met c kan men vaak benaderen: $T \simeq E \qquad p \simeq E/c \quad$ of $\quad p \simeq T/c$.

Volledigheidshalve schrijven we nog de transformatie van krachten op, maar alleen voor het eenvoudigste geval, nl. vanuit het ruststelsel van een deeltje naar een ander stelsel. Dat is dus de overgang van (17) naar (18). In (18) drukken we $\vec{p}$ uit in de impuls en energie in het andere stelsel m.b.v. (26) en differentiëren naar t. Daarbij is $dE/dt = dT/dt = \vec{F}.\vec{v}$ (zie (20)) en dat is nul in het ruststelsel. Verder is $dt = \gamma d\tau$ (tijdsdilatatie) dus $d\vec{p}_o/dt = d\vec{p}_o/\gamma d\tau$. Er komt:

$$F_x = F_{ox} \qquad F_y = \frac{1}{\gamma} F_{oy} \qquad F_z = \frac{1}{\gamma} F_{oz} \tag{27}$$

Dus: beweegt een deeltje met snelheid $\vec{v}$ in het stelsel S en is $\vec{F}_o$ de kracht op het deeltje in zijn ruststelsel dan is in S de krachtskomponent in de richting $\vec{v}$ gelijk aan die in het ruststelsel, de komponent in de richting loodrecht op $\vec{v}$ is voor S een faktor γ maal zo klein als die in het ruststelsel. Kort genoteerd:

$$\vec{F}_{//} = \vec{F}_{o//} \qquad \vec{F}_{\perp} = \frac{1}{\gamma} \vec{F}_{o\perp} \tag{28}$$

Tenslotte kunnen we ook de bewegingsvergelijking ontbinden in een komponent evenwijdig aan de instantane snelheid $\vec{v}$ en een komponent loodrechtdaarop. We gaan uit van het 3e lid van (19) en herschrijven daarin dm/dt als $dE/c^2dt = \vec{F}.\vec{v}/c^2$:

$$\vec{F} = \vec{F}_{//} + \vec{F}_{\perp} = m\vec{a}_{//} + m\vec{a}_{\perp} + \frac{1}{c^2} (\vec{F}_{//}.\vec{v})\vec{v} = m\vec{a}_{//} + m\vec{a}_{\perp} + \frac{v^2}{c^2} \vec{F}_{//}$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\perp} &= m\vec{a}_{\perp} = \gamma m_o \vec{a}_{\perp} \\ \vec{F}_{//} &= \gamma^3 m_o \vec{a}_{//} \end{aligned} \tag{29}$$

We zien weer, dat $\vec{F}$ en $\vec{a}$ niet evenwijdig hoeven te zijn. Wel in het ruststelsel ($\gamma = 1$) en natuurlijk ook als toevallig $\vec{F}_{//} = \vec{0}$ of $\vec{F}_{\perp} = \vec{0}$. Een $\vec{F}_{\perp}$ staat loodrecht op $\vec{v}$ en verricht dus geen arbeid, zo'n kracht zal de snelheid wel in richting maar niet in grootte doen veranderen (bijv. afbuiging van geladen deeltjes in eén magneetveld). Een $\vec{F}_{//}$ verricht wel arbeid en zal juist de grootte en niet de richting van $\vec{v}$ beinvloeden.

Uit (29) volgt dat het relativistisch "gemakkelijker" is, de baan van een deeltje te krommen dan de snelheid in grootte te veranderen, omdat $\gamma^3 > \gamma$: de longitudinale "traagheid" is groter dan de transversale.

N.B. Uit (28) en (29) volgt natuurlijk de transformatie van $\vec{a}$ vanuit het ruststelsel:

$$\vec{a}_{//} = \vec{a}_{o//}/\gamma^3 \qquad \vec{a}_{\perp} = \vec{a}_{o\perp}/\gamma^2 \tag{30}$$

Deeltjes zonder rustmassa.

Nemen we de Einstein-relatie $E = mc^2$ serieus dan moeten we ook aan elektromagnetische straling massa toekennen en impuls. De beschrijving van de straling als een stroom stralingskwanta of fotonen met snelheid c in vacuüm past gemakkelijk in het relativistische formalisme.

De relatie $p = mv = Ev/c^2$ wordt voor fotonen met $v = c$:

$$p = E/c \tag{31}$$

(ook de klassieke theorie gaf hetzelfde verband tussen impulsdichtheid en energiedichtheid in een elektromagnetische golf).

Een foton heeft geen ruststelsel (want de snelheid is in alle stelsels c) en het begrip rustmassa vervalt dus. Of ook: in $E = mc^2 = \gamma m_o c^2$ zal $\gamma \to \infty$ als $v \to c$ dus moet $m_o = 0$. Hetzelfde volgt uit (25) en (31).

Botsingen, desintegraties en andere processen waarbij fotonen betrokken zijn, emissies of absorpties van lichtkwanta of γ-kwanta kunnen dus als soortgelijke processen met behulp van (15) en (16) beschreven worden. Soms moet men er wel op bedacht zijn dat een foton geen ruststelsel heeft. De bekende paarvorming bijv.



$$\gamma \to e^- + e^+$$

kan op zich niet aan impulsbehoud voldoen: er is altijd een inertiaal stelsel waarin de eindimpuls nul is maar de fotonimpuls is in geen enkel stelsel nul. Er moet dus nog een ander deeltje in de reactie betrokken zijn geweest, bijv. een ander elektron of een atoomkern.

(Een kern heeft een relatief grote massa en kan dus een deel van de foton-impuls opnemen zonder veel energie te onttrekken; bij benadering gaat dus praktisch alle energie naar de elektronen terwijl de kern de impulsbalans in evenwicht houdt.)

De energie van het foton is door de relatie van Planck $E = h\nu$ weer uit te drukken in de frekwentie ν. Ook dit past in de relativistische beschrijving omdat E en ν op dezelfde wijze transformeren en de relatie van Planck dus in alle stelsels geldt: de transformatie van E volgt uit (26) met speciaal (31), de transformatie van ν hebben we reeds als Doppler-effekt afgeleid in het longitudinale geval. Ga zelf na, dat voor dit geval E en ν inderdaad op dezelfde wijze transformeren.

Andere deeltjes zonder rustmassa zijn de neutrino's en anti-neutrino's (en vermoedelijk het graviton, maar dat is een klasse apart).

LITERATUURLIJST "RELATIVISTISCHE BEGINSELEN"

Inleidende leerboeken over de speciale relativiteitstheorie:

Bohm, D.	The special theory of relativity, Benjamin, 1963
Bondi, H.	Relativity and common sense, Doubleday, 1964 (voor $ 1,25 een goed koopje. Geeft afleidingen met lichtsignalen).
Bondi, H.	Assumption and myth in physical theory, Ch. 2, Cambridge, 1967
Born, M.	Die Relativitätstheorie Einsteins, 4.Aufl., Springer, 1964 Einsteins's theory of relativity, Dover, 1962 Heruitgave van klassiek geschrift uit 1922. Hoofdstuk 6 geeft de speciale rel. theorie.
Butler, S.T. and Messel, H.	Time: selected lectures on time and relativity, Pergamon, 1965. Zie 1e deel, Ch. 5-6 en 2e deel Ch. 1-2-3 (lichtsignaaltheorie van Bondi)
Dingle, H.	The special theory of relativity, 4th ed., Wiley, 1961
Durell, C.V.	Readable relativity, Harper, 1960. De relativiteitstheorie, Aula-boeken, 1965. Populariserend.
Einstein, A.	Ueber die spezielle und algemeine Relativitätstheorie, Vieweg, 19. Aufl., 1963
French, A.P.	Special relativity, M.I.T. Introductory Physics Series, Norton, 1968 (een van de beste boekjes, als paperback $ 1.95). Ned. vertaling: Speciale relativiteitstheorie, Prisma-Technica
Good, R.H.	Basic concepts of relativity, Reinhold, 1968
Helliwell, T.M.	Introduction to special relativity, Allyn and Bacon, 1966
Kacser, Cl.	Introduction to the special theory of relativity, Prentice-Hall, 1967
Katz, R.	An introduction to the special theory of relativity, Van Nostrand, 1964 (een heel goed boekje, de prijs van 14 shilling wel waard).

Kilmister, C.W. — Special theory of relativity, Pergamon, 1970 . (bevat een niet overal elementair overzicht en reprodukties van artikelen, o.a. van Lorentz, Poincaré, Einstein, Zeeman)

Lorentz, Einstein,e.a. — The principle of relativity, Dover (oorspronkelijke artikelen)

Marder, L. — An introduction to relativity, Longmans, 1968

Melcher, H. — Relativitätstheorie, VEB, 1971

Mermin, N.D. — Space and time in special relativity, Mc Graw-Hill, 1968

Ney, E.P. — Electromagnetism and relativity, Harper and Row, 1962

Resnick, R. — Introduction to special relativity, Wiley, 1968

Rindler, W. — Essential relativity, Van Nostrand, 1969

Rosser, W. and Mc Cullock, R.K. — Relativity and high energy physics, Wykeham Publications, 1969

Rosser, W.G.V. — Introductory relativity, Butterworths, 1967

Sard, R.D. — Relativistic mechanics: special relativity and classical particle dynamics, Benjamin, 1970

Sears, F.W. and Brehme, R.W. — Introduction to the theory of relativity, Addison-Wesley, 1968

Skinner, R. — Relativity, Blaisdell, 1969

Smith, J.H. — Introduction to special relativity, Benjamin, 1965

Taylor, E.F. and Wheeler, J.A. — Spacetime physics, Freeman, 1966

Westwood, B.A. — Relativity, MacMillan, 1971

Een selectie van boeken, die een of meer elementaire hoofdstukken over de speciale relativiteitstheorie bevatten:

Atkins, K.R. — Physics, Wiley, 1965. Ch. 22-23-24.

Beiser, A. — Concepts of modern physics, Mc Graw-Hill, 1963. Ch.1.

Beiser, A. — The foundations of physics, Addison-Wesley, 1964. Ch. 20.

Beiser, A. — The mainstream of physics, Addison-Wesley, 1962 Ch. 18.

Beiser, A. — Modern physics, Addison-Wesley, 1968, Ch. 2.

Constant, F.W. — Fundamental laws of physics, Addison-Wesley, 1963, Ch. 10.

Constant, F.W. — Fundamental principles of physics, Addison-Wesley, 1967, Ch.10.

Cooper, L.N. — An introduction to the meaning and structure of physics, Harper and Row, 1968, Ch. 28-33.

Feynman, R.P. — Lectures on physics, Vol.I, 1963, Ch. 15 and 16 (uitgeschreven colleges van een vooraanstaand fysicus en begaafd didacticus. Aanbevolen!)

Fowles, G.R. — Analytical mechanics, Holt, 1962, Ch.12 (beknopt)

Goble, A.T. and Baker, D.K. — Elements of modern physics, Ronald Press, 1962, Ch.4.

Hazen, W.E. and Pidd, R.W. — Physics, Addison-Wesley, 1965, Ch. 13.

Kaempffer, F.A. — The elements of physics, Blaisdell, 1967, o.a. Ch. 10 en 11.

Kittel, Ch. e.a. — Mechanics, Mc Graw-Hill, 1962-65, Ch. 10-11-12. (moderne, uitvoerige bespreking van de fysische grondslagen)

Richards, J.A. e.a. — Modern University Physics, Addison-Wesley, 1960, Ch. 39

Richtmeyer, F.K. e.a. — Introduction to modern physics, 5th ed. Mc Graw-Hill, 1955

Stephenson, R.J. — Mechanics and properties of matter, 3rd ed., John Wiley, 1969, §§ 1.10-11, 2.14, 3.10

Wehr, M.R. and Richards, J.A. — Physics of the atom, Addison-Wesley, 1960-64, Ch. 5.

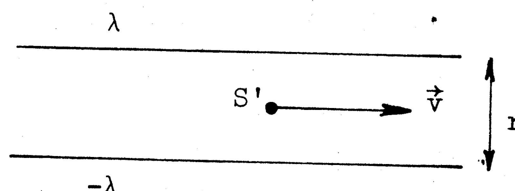
Weidner, R.T. and Sells, R.L. — Elementary modern physics, Allyn and Bacon, 1960, Ch. 2.

TRANSITORIUM I
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT

WERKKOLLEGE RELATIVISTISCHE BEGINSELEN.

1e jaars 1972-73

1. Kracht tussen evenwijdige lijnladingen.



Twee evenwijdige, oneindige lijnladingen met lijnladingsdichtheden λ en $-\lambda$ staan stil in het laboratoriumstelsel S op afstand r in vakuum. Uit het veld van een lijnlading volgt de (aantrekkende) kracht per eenheid van lading in S:

$$f = \lambda \, / \, 2\pi\varepsilon_o r$$

We willen de overeenkomstige grootheid f' berekenen voor een waarnemer S' die met snelheid $\vec{v}$ // de ladingsrechten beweegt.

B ... draad $= \mu_o \frac{I}{2\pi r}$ $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$

a) Neem aan dat lading een invariante grootheid is.
Wat zijn de ladingsdichtheden voor S'? En de afstand der twee ladingsrechten? Hoe groot is dus voor S' de aantrekkende kracht f'_{el} per ladingseenheid?

b) Wat is de stroomsterkte I' die S' aan de rechten toeschrijft? Hoe groot is de magnetische induktie B' die de ene stroomrechte ter plaatse van de andere veroorzaakt? Hoe groot is dus de (afstotende!) kracht f'_m per eenheid van bewegende lading in S'?

c) Verifieer dat in totaal $f' = f/\gamma < f$ (zie ook (28) in het diktaat).

d) Ga na dat $f'_m \, / \, f'_{el} = v^2/c^2$ en dat men dit resultaat ook klassiek vindt (d.w.z. zonder de Lorentz-kontraktie in rekening te brengen) hoewel het klassieke antwoord $f' = (1 - v^2/c^2)f$ afwijkt van het antwoord in c.

e) Moeten we verwachten dat bij voldoend grote snelheid v de aantrekking overgaat in afstoting?

2. Doppler-effekt.

a) Hoe hard moet een automobilist rijden om een rood stoplicht (650 nm) als groen (530 nm) te zien?

b) Langs een snelweg staat radar-apparatuur voor snelheidskontrole. Een uitgezonden signaal heeft een frekwentie van 2400 MHz, de echo van een naderende auto blijkt 600 Hz verschoven te zijn.

Hoe groot was de snelheid van de auto in km/uur?
Had de echo een hogere of lagere frekwentie dan het uitgezonden signaal?

c) Een "ruimte-veerpont" tussen aarde en Mars nadert Mars met konstante snelheid = c/11 en stuurt een radarsignaal van 2500 MHz uit.

Welke frekwentie heeft de echo voor een Mars-bewoner en welke voor de veerpont? Ga verschillende manieren na om het antwoord te vinden (Doppler-formule, signaalmethode, snelheid van het "spiegelbeeld").

3. Uit een hoge-energie-machine komt een bundel π-mesonen, waarvan de intensiteit tot de helft gedaald is op 37 m van af de plaats waar zij gevormd zijn. Neem aan dat alle mesonen een snelheid van 0,99 c hadden. De halveringstijd van stilstaande mesonen is $1{,}78.10^{-8}$ sec.

Kontroleer de afstand van 37 m door deze te berekenen

a) uit tijdsdilatatie

b) uit Lorentz-kontraktie

4. Er zijn vaak verschillende manieren om relativistische problemen op te lossen (transformatie-formules, invariante vormen, tijdsdilatatie of lengte-kontraktie, signaalmethode e.d.). Probeer dat.

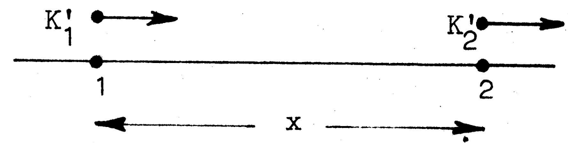
In het onderstaande wordt de gebruikelijke situatie bij bijzondere Lorentz-transformaties (diktaat p.16) ondersteld.

a) S'passeert een klok van S in x = 1 m. Wat wijzen die klok en de eigen klok van S' dan aan als $\gamma = 5/4$?

b) Zij $\gamma = 2$. Als de eigen klok van S op 10 minuten staat kijkt hij door een teleskoop naar S'. Welke tijd leest S af op de klok van S'?

5. S en S' beweren van elkaars klokken dat ze achterlopen. Stel dat S een aantal klokken K (voor hem in rust op de X-as) gesynchroniseerd heeft (hoe?). Evenzo doet S' met klokken K'.

Dan zullen S en S' bovendien beweren dat "bewegende klokken onderling niet synchroon lopen".

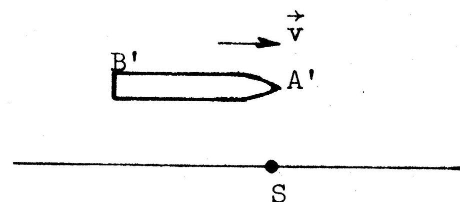


Immers: Twee in S rustende waarnemers die "gelijktijdig" passerende klokken K'_1 en K'_2 aflezen moeten verschillende tijden op die klokken aflezen.

Bepaal dit verschil. Hoe hangt het van x af? Wordt K'_2 als "achter bij K'_1" beoordeeld of omgekeerd?

Hoe beoordeelt S' deze voorvallen?

6.) a) Een raket van eigen lengte l_o heeft snelheid $\vec{v}$ t.o.v. waarnemer S. De kop A' passeert S op t = t' = 0. Op dat moment gaat in S een lamp branden.

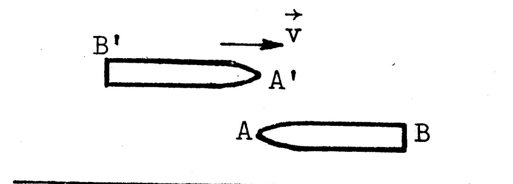


Hoe laat wijst de klok van een waarnemer B' in de staart van de raket als hij het licht ziet?

Hoe laat gebeurt dat volgens S?

Hoe laat passeert B' waarnemer S volgens zijn eigen klok en hoe laat volgens S?

b) Een gelijke raket rust in S. (zie figuur). Er is afgesproken dat als A en B' elkaar passeren, een schutter in de staart B loodrecht op AB een schot afvuurt.



Deze schutter redeneert: A'B' is verkort dus zal ik de raket A'B' missen.

De waarnemer in B' redeneert: AB is verkort dus zal B stellig raak schieten.

Wie heeft gelijk?

7. Bepaal de relativistische som van twee snelheden $\vec{u}$ en $\vec{v}$ die tegen elkaar in gericht zijn.

Twee protonen hebben in het laboratorium snelheden van 0,70 c in tegengestelde richtingen. Hoe snel is het ene proton t.o.v. het andere?



Uit de kosmische straling nadert een deeltje de aarde met snelheid 0,90 c langs de aardas naar de noordpool. Een ander deeltje nadert met snelheid 0,80 c langs de as de zuidpool. Hoe groot is hun onderlinge snelheid? Hetzelfde als beide deeltjes naar de noordpool invallen.

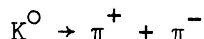
Een deeltje met snelheid c/10 in het laboratorium emitteert een elektron, dat in het (aanvankelijke) ruststelsel van het deeltje een snelheid van 9 c/10 heeft.
Bereken de snelheid van het elektron in het laboratorium

a) als het in voorwaartse richting wordt uitgezonden;

b) als het (in dat ruststelsel) loodrecht daarop wordt uitgezonden;

c) als het loodrecht daarop in het laboratorium wordt uitgezonden.

8. Een K^o-meson valt uiteen in twee π-mesonen:



$$K^o \rightarrow \pi^+ + \pi^-$$

Als het K^o-meson in het laboratorium een snelheid had van 0,90 c en elk π-meson een snelheid heeft van 0,83 c in het ruststelsel van het K^o-meson, wat zijn dan de grootste en de kleinste waarden van de snelheid van de π-mesonen in het laboratorium?

9. a) Van twee puntvoorvallen zijn de coördinaten in S:

	I	II
x	0,3 m	0,4 m
y	0,5 m	0,7 m
z	0	0
t	2.10^{-9} s	3.10^{-9} s

Kan II veroorzaakt zijn door I (of omgekeerd)?

Is er een stelsel S' waarin I en II gelijktijdig zijn? zo ja, geeft zo'n S' aan. Hoe groot is de afstand r'?

Is er een stelsel S" waarin I en II gelijkplaatsig zijn? Zo ja, geef zo'n S" aan. Bereken de duur in S" tussen beide voorvallen.

b) Hetzelfde voor het geval:

	I	II
x	0,7 m	0,4 m
y	0,5 m	0,6 m
z	0	0
t	5.10^{-9} s	4.10^{-9} s

10. a) Een deeltje met rustmassa m_o heeft een snelheid van 0,600 c. Druk de kinetische energie en de impuls uit in m_o en c, zowel klassiek als relativistisch.

b) Bereken de snelheid van elektronen, versneld over resp. 10^5 volt, 10 MV en 1 GV.
Doe hetzelfde voor protonen.
Een benadering is goed genoeg, bereken β of 1 - β en bezuinig op het rekenwerk. Neem afgeronde waarden voor de rustenergie.

c) Meestal is niet de snelheid, maar de kinetische energie T van een deeltje gegeven. De grootheid

$$(T_{rel} - T_{klas}) / T_{klas}$$

(relatieve korrektie op T_{klas}) kan als kriterium dienen voor de noodzaak om relativistisch te rekenen.
Stel dat deze korrektie 1% mag bedragen om nog klassiek te rekenen.
Hoe groot mag de fraktie T_{klas}/ E_o dan ongeveer zijn?
Hoe groot is dan β? Hoe groot is T_{klas} in MeV voor een proton bij deze grens? En hoe groot vóór een elektron?

11. a) Bij botsingsreakties e.d. geldt wel behoud van energie, maar niet noodzakelijk behoud van rustenergie.
Bepaal de relatieve toename van de rustenergie bij de volkomen inelastische botsing van p. 24.
Bereken die speciaal als de twee deeltjes in het nulimpulsstelsel S' een snelheid van 1 km/s hebben.

b) Een deeltje met rustmassa m_o en kinetische energie $2m_oc^2$ botst met een stilstaand deeltje met rustmassa $2m_o$. Bereken de rustmassa na de botsing als de twee deeltjes één nieuw deeltje vormen.

c) Een foton met energie E wordt geabsorbeerd door een stilstaand deeltje met rustmassa m_o.
Welke snelheid krijgt het deeltje?

d) Als bij de volkomen inelastische botsing van p. 24 $v = 0{,}8\ c$, wat zijn dan snelheid en rustmassa van het samengestelde deeltje?

12. a) In opgave 8 was gegeven dat de π-mesonen uit

$$K^{o} \rightarrow \pi^{+} + \pi^{-}$$

elk een snelheid van 0,83 c hadden in het ruststelsel van K^{o}.
Verifieer dat uit de rustenergieën $K^{o} = 498$ MeV; $\pi^{\pm} = 140$ MeV.

b) Bereken de impuls (als pc) van resp. een proton, een elektron en een foton met kinetische energie 1 GeV.

c) In een ge-evakueerde buis loopt een bundel elektronen.
Bereken hun kinetische energie als de snelheid gelijk moet zijn aan die van een lichtsignaal in lucht. Stel de brekingsindex van lucht voor zichtbaar licht 1,000277.

13. Experiment van Alväger c.s. (zie diktaat p.6).

a) Er was gegeven dat de π^{o}-mesonen een totale energie van 6 GeV (of meer) hebben en dat de snelheid dan 0,99975 c was. Verifieer dit uit de rustenergie 135 MeV.
Verifieer ook dat deze mesonen "slechts enkele mikrons reizen" uit het gegeven, dat de gemiddelde levensduur in hun ruststelsel ongeveer 2.10^{-16} sek is (hoeveel dus in het lab-stelsel?).

b) Als de pionen niet mono-energetisch waren maar hun totale energie tussen 6,0 en 18,0 GeV ligt, bereken dan de intervallen van hun snelheden, hun gemiddelde levensduur in het lab en van de gemiddeld afgelegde weg.

14. a) Een atoom heeft in een aangeslagen toestand een rustenergie E_o.
Het emitteert een foton waardoor de rustenergie afneemt met ΔE_o.
Bepaal de frekwentie van het foton in het aanvankelijke ruststelsel van het atoom.

b) Een kern van 10^{-23}g is aanvankelijk in rust en emitteert dan een γ-kwantum van 1 MeV.
Bereken de kinetische energie van de eindkern.

15. Eddington heeft opgemerkt dat het massa-ekwivalent van de potentiële energie van 1 g elektronen, indien ze binnen een bol met 10 cm straal zouden kunnen worden samengeperst, zoiets als 10^7 ton zou zijn.
Reken dat na. Ga ook na, dat deze denkbeeldige situatie zou ontstaan als alle atoomkernen uit een bolvormig volume water met 10 cm straal zouden worden verwijderd.

16. De fotonen-raket.
De voortstuwing van een raket zou in principe kunnen gebeuren door emissie van straling. Stel dat de raket aanvankelijk in rust is met een energie E_o en dat na voortdurende uitzending van straling de snelheid $v = \beta c$ is en de rustenergie dan $E_o(\gamma)$ waarin $\gamma = \gamma(v)$.
Leid uit het volgende verband af uit behoud van energie en impuls, bijv. in het aanvankelijke ruststelsel:

$$f^2 - 2\gamma f + 1 = 0$$

waarin $f = E_o(\gamma)/E_o$ (dus $f < 1$). Oplossen geeft $f = 1/k$ (k = Doppler-faktor).
Als de straling in het raketstelsel mono-chromatisch is en bij vertrek een frekwentie ν_o heeft voor een achterblijvende waarnemer, welke frekwentie heeft dan de straling, bij een bepaalde waarde van f uitgezonden, voor die waarnemer?

17. Geladen deeltjes in magneetveld.
Het verband tussen de baanstraal R en de impuls p van een deeltje met lading q in een veld $\vec{B}$, dat loodrecht staat op de impuls $\vec{p}$:

$$R = p / q B$$

geldt ook relativistisch, mits p relativistisch genomen wordt.

Stel dat het deeltje vanuit rust versneld is over resp. 10 MV, 50 MV of 1 GV en loodrecht valt in een veld van $B = 2$ Wb/m^2.
Bereken in goede benadering R indien het deeltje een elektron is en ook als het een proton is. Bepaal eerst of U klassiek of relativistisch zult rekenen. Vergelijk eventueel relativistische en klassieke antwoorden.

18. Een deeltje waarvan de lading gelijk is aan die van het proton heeft een kinetische energie van 12 MeV. In een magneetveld van 0,185 Wb/m^2 kan het een cirkel doorlopen met een middellijn van 216,2 cm.
Bereken de rustenergie van het deeltje en zijn snelheid β.

19. Bereken de bindingsenergie in MeV van een kern ^{12}C uit de volgende rustmassa's:

^{12}C 12,000.000 a.m.e. (per definitie)

^{1}H 1,007.825 a.m.e.

n 1,008.665 a.m.e.

1 atomaire massa-eenheid = $1,660.44.10^{-27}$ kg.
de lichtsnelheid = $2,997925.10^{8}$ m/s
de elementaire lading = $1,60219.10^{-19}$ C

Vergelijk het antwoord met de rustenergie van het elektron.

Opm.: Is het niet een bezwaar dat de opgegeven massa's van C en H neutrale atomen en niet de kernen betreffen?

20. Een deeltje met lading q en rustmassa m_o valt vanuit rust in een homogeen en konstant elektrisch veld $\vec{E}$.

a) Na zekere tijd t is de snelheid v_1 en de afgelegde weg x.
Als v_1 gegeven is bepaal dan t uit de bewegingsvergelijking en x uit een energie-beschouwing.

b) Los de bewegingsvergelijking op door twee maal te integreren en leid het verband af

$$\left(x + \frac{c^2}{g}\right)^2 - c^2t^2 = \frac{c^4}{g^2}$$

waarin $g = qE/m_o$ (d.i. de klassieke versnelling).

Ga na dat deze vergelijking ook volgt uit de antwoorden van a.

Vergelijk het resultaat met het klassieke verband tussen x en t.
Ga na dat $v \to c$ als $t \to \infty$ en dat bij reeksontwikkeling van x(t) de klassieke relatie als eerste term verschijnt.

TRANSITORIUM I
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT

TENTAMEN RELATIVISTISCHE BEGINSELEN

2 november 1972

1. Een raket passeert de aarde met snelheid 0,8 c om 12.00 uur, zowel op de aardse klok als op die van de ruimtevaarders. De raket reist eenparig rechtlijnig.

   a) Als de raketklok 12.30 uur wijst zenden de ruimtevaarders een radiosignaal uit, dat door het aardstation wordt opgevangen en onmiddellijk wordt beantwoord door terugkaatsing van het signaal.
   Hoe laat ontvangen de ruimtevaarders (op hun klok) het antwoord? 16 h 30

   b) Als λ_0 de golflengte was waarop de ruimtevaarders hebben uitgezonden (in hun stelsel) op welke golflengte moeten ze dan afstemmen voor het antwoord? $9\lambda_0$

   c) Als de raketklok 13.00 uur wijst passeert de raket een ruimtestation dat geacht mag worden stil te staan t.o.v. aarde en waarvan de klokken steeds de aardse tijd aanwijzen.
   Hoe laat is het dan in het ruimtestation? 13 h 40

2. a) Een deeltje, waarvan de lading gelijk is aan die van het proton, valt met een kinetische energie van 12 MeV loodrecht in een homogeen magneetveld. Het beschrijft daarin (een deel van) een cirkelbaan met straal 50 cm. De magnetische induktie B van het veld is 0,40 T (= tesla = W b/m^2 = = V s/m^2 = N/Am).
   Bereken:
   - de rustenergie van dit deeltje in MeV; 144
   - de snelheid β. 0,4

   Aanwijzing: een deeltje met lading q dat met impuls $\vec{p}$ loodrecht op een magneetveld $\vec{B}$ beweegt beschrijft eenparig een cirkel met straal R = p/q B.

   b) Het hierboven bedoelde deeltje is instabiel en heeft in zijn ruststelsel een halveringstijd van $1{,}8.10^{-8}$s. 23,4 mm
   Als het deeltje desintegreert nadat het 1/100 van de halveringstijd in het magneetveld gereisd heeft, hoe lang is dan de afgelegde baan in dat veld (uiteraard voor een waarnemer die t.o.v. de magneet stilstaat)?

   Geg.: lichtsnelheid in vakuum 3.10^8m/s.